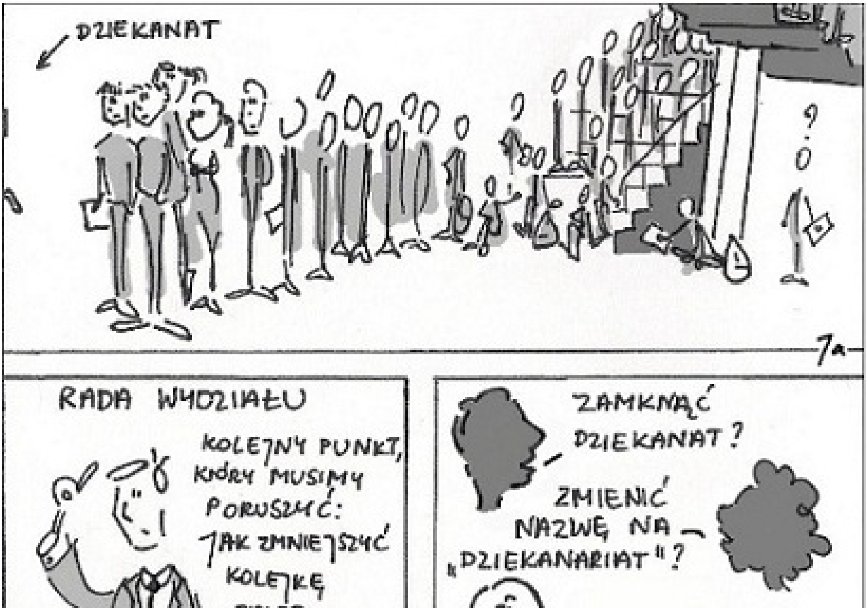
[MACIERZATOR49]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



ISSN 2083-9774

Witamy w październikowym numerze [MACIERZATORa]!

[Od redakcji]

Miło nam przedstawić pierwszy powakacyjny numer [Macierzatora], który otwiera artykuł o funkcjach ciągłych w choć jednym punkcie (których, jak się okazuje, istnieje zdumiewająco niewiele). Nowy rok akademicki witamy rozpoczęciem nowego cyklu w naszym miesięczniku: recenzji coraz liczniej wydawanych książek popularyzujących matematykę wyższą. Publikujemy także kolejną część *Kącika TEXowego*, w którym przybliżymy tworzenie TEXowych tabelek; przypominamy, że wszystkie archiwalne jego części można znaleźć na stronie `www.knm.katowice.pl/macierzator.php`. Zachęcamy do buszowania po archiwum [Macierzatora] – można w nim znaleźć nie tylko wiele ciekawych tekstów o matematyce i matematykach, ale też dobrych porad, na przykład, bardzo na czasie, jak napisać e-mail do wykładowcy ([Macierzator 30]).

Zachęcamy gorąco do współpracy z [Macierzatorem] – z przyjemnością powiększymy nasze redakcyjne grono. Zainteresowanych prosimy o kontakt w pokoju Koła Naukowego Matematyków (524) lub e-mailowo pod adresem `macierzator@knm.katowice.pl`.

Dobrego roku akademickiego 2012/2013 życzy
redakcja

[Funkcje ciągłe choć w jednym punkcie]

Od czasu do czasu, na kolejnych etapach nauki matematyki, przeżywamy wstrząsy psychiczne. Dzieje się tak, kiedy dowiadujemy się o czymś, co jest całkowicie niezgodne z naszą intuicją. Bez wątpienia jednym z faktów, które mogą zrujnować psychikę, jest twierdzenie Banacha, które mówi, że zbiór funkcji różniczkowalnych choć w jednym punkcie jest podzbiorem pierwszej kategorii przestrzeni funkcji ciągłych. Innymi słowy, funkcji różniczkowalnych istnieje pomijalnie mało. W związku z powyższym twierdzeniem, nasuwa się naturalne pytanie: ile jest funkcji ciągłych choć w jednym punkcie (wśród dowolnych funkcji)? W tym momencie nie powinno nikogo zdziwić, że jest ich równie mało, a nawet mniej. Po tym wstępie przejdźmy do sformalizowania tej hipotezy i jej dowodu.

Niech $\mathrm{B}(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń funkcji ograniczonych odwzorowujących zbiór liczb rzeczywistych w siebie wyposażoną w normę

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Zbiór funkcji ograniczonych i ciągłych choć w jednym punkcie jest nigdziegęstym podzbiorem przestrzeni* $\mathrm{B}(\mathbb{R})$.

Dowód. Niech $F \subset \mathrm{B}(\mathbb{R})$ będzie zbiorem funkcji ciągłych choć w jednym punkcie, zaś $G \subset \mathrm{B}(\mathbb{R})$ zbiorem funkcji przyjmujących skończoną liczbę wartości i nieciągłych w każdym punkcie. Pokażemy, że dla każdego $g \in G$ istnieje kula K_g o środku w punkcie g, która jest rozłączna ze zbiorem F.

Ustalmy $g \in G$ i połóżmy

$$\varepsilon := \min\{|x-y| \colon x, y \in g(\mathbb{R}) \text{ oraz } x \neq y\}.$$

Pokażemy, że kula K_g o środku w punkcie g i promieniu $\frac{\varepsilon}{3}$ jest rozłączna ze zbiorem F. Przypuśćmy nie wprost, że

$$f \in K_g \cap F.$$

Niech x_0 będzie punktem ciągłości funkcji f, zaś U_{x_0} takim otoczeniem punktu x_0, że

$$f(U_{x_0}) \subset \Big(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{3},\, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{3}\Big).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &\le |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - g(x_0)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

dla $x \in U_{x_0}$, co oznacza, że $g(x) = g(x_0)$ dla $x \in U_{x_0}$. Zatem g jest funkcją ciągłą w x_0; sprzeczność.

Następujące inkluzje są oczywiste

$$\begin{aligned} F &\subset \mathrm{B}(\mathbb{R}) \setminus K_g \quad \text{dla każdego } g \in G \\ F &\subset \mathrm{B}(\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{g \in G} K_g \\ \mathrm{cl} F &\subset \mathrm{B}(\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{g \in G} K_g. \end{aligned}$$

Pokażemy, i to zakończy dowód, że zbiór

$$\mathrm{B}(\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{g \in G} K_g \tag{1}$$

ma puste wnętrze.

Przypuśćmy nie wprost, że

$$f \in \mathrm{int}\Big(\mathrm{B}(\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{g \in G} K_g\Big).$$

Wówczas istnieje takie $\epsilon \in (0,1)$, że kula o środku w punkcie f i promieniu ϵ zawiera się w zbiorze (1). Niech

$$A_k = f^{-1}\left((k\epsilon, (k+1)\epsilon]\right) \cap \mathbb{Q}$$

oraz

$$B_k = f^{-1}\left((k\epsilon, (k+1)\epsilon]\right) \setminus \mathbb{Q}$$

dla $k \in \mathbb{Z}$. Z ograniczoności funkcji f wynika, że skończenie wiele z powyższych zbiorów jest niepustych. Zdefiniujmy funkcję $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$h(x) = \begin{cases} (k+\frac{1}{3})\epsilon & \text{dla } x \in A_k \\ (k+\frac{2}{3})\epsilon & \text{dla } x \in B_k \end{cases}.$$

Wówczas $h \in G$. Istotnie, funkcja h przyjmuje skończenie wiele wartości. Wystarczy pokazać, że jest ona nieciągła w każdym punkcie.

Ustalmy $x \in \mathbb{R}$. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami odpowiednio liczb wymiernych i liczb niewymiernych zbieżnymi do x. Granica

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n),$$

o ile istnieje, jest postaci $(k_1+\frac{1}{3})\epsilon$ dla pewnego $k_1 \in \mathbb{Z}$. Podobnie, granica

$$\lim_{n\to\infty} h(y_n),$$

o ile istnieje, jest postaci $(k_2+\frac{2}{3})\epsilon$ dla pewnego $k_2 \in \mathbb{Z}$. W żadnym wypadku granice te nie mogą jednocześnie istnieć i być równe. To dowodzi nieciągłości funkcji h w punkcie x.

Z drugiej strony, jak łatwo sprawdzić,

$$\|h - f\| \leq \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon.$$

To zaś oznacza, że h należy do kuli o środku w punkcie f i promieniu ϵ, a w konsekwencji do zbioru (1). Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy. $\square$

Udowodnione twierdzenie odnosi się do bardzo szczególnego przypadku, mianowicie do (ograniczonych) funkcji rzeczywistych określonych na prostej. Zachęcam Czytelników do próby uogólnienia tego twierdzenia na szerszą klasę przestrzeni.

Szymon

[Opowiedzieć matematykę]

Im więcej dziur, tym mniej sera

Matematyka? Dlaczego akurat matematyka?! Nudne, trudne, co w tym ciekawego? To jedna z najczęstszych reakcji na informację, co studiuję. Niestety! Matematykę powszechnie identyfikuje się z arytmetyką, nic zatem dziwnego, że laikom wydaje się ona nieprawdopodobnie nudna. Taki obraz matematyki tworzy – i utrwala – praktyka szkolna. Większość uczniów nie ma szans przekonać się, czy interesuje ich matematyka pozaszkolna, bo po prostu nigdy się z nią nie spotka. Dlatego właśnie za tak istotną uważam dobrą, rozsądną popularyzację matematyki wyższej.

Jeszcze kilka lat temu trafić na ślad matematyki nie-szkolnej było bardzo trudno. Od pewnego czasu obserwuję jednak z radością pojawiające

się na rynku wydawniczym kolejne, atrakcyjne publikacje popularyzatorskie oraz z zakresu historii matematyki. Sporo tekstów jest też dostępnych w Internecie, jednak ich jakość i rzetelność bywa dyskusyjna; przeszkadza brak korekty merytorycznej, a nierzadko i językowej. Zdecydowanie większe zaufanie budzą we mnie książki.

Cykl recenzji książek opowiadających o matematyce zacznijmy od wydanej u nas niedawno, bo we wrześniu 2012, książeczki Holgera Dambecka *Im więcej dziur, tym mniej sera. Matematyka zdumiewająco prosta*[1]. Autor, z wykształcenia fizyk, a z zawodu dziennikarz, jako nastolatek uczestniczył w olimpiadach matematycznych, a od kilku lat publikuje artykuły popularyzujące matematykę. Skąd pomysł na książkę? Oddajmy głos Dambeckowi:

> *Statystyki wejść na stronę z moją kolumną świadczą, że matematyką interesuje się wielu; większość tekstów przywoływana jest częściej niż 100 000 razy. Wiem jednak również, że ta dziedzina wiedzy, jak żadna inna, dzieli ludzi na dwa obozy. Jedni ją kochają, drudzy miewają z jej powodu koszmary. Dlaczego tak jest? Dlaczego rutynowani koledzy dziennikarze pytają mnie, jak policzyć procent?* (...) [*O tym*] *traktuje niniejsza publikacja.*

Wydaje się, że głównym celem Dambecka jest przekonanie czytelnika, że każdy ma predyspozycje ku przynajmniej pewnym obszarom matematyki. Towarzyszy ona nawet bardzo małym dzieciom czy zwierzętom. Dambeck opowiada o wprowadzaniu teorii zbiorów w kultowej *Ulicy Sezamkowej* (wszystko dzięki Ciasteczkowemu Potworowi!), o tym, jak sprawdzić, czy równoliczność wyczuwają niemowlęta (wyczuwają). Dowiemy się też, jak

[1] Holger Dambeck, *Im więcej dziur, tym mniej sera. Matematyka zdumiewająco prosta.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012, ISBN 978-83-01-17100-1.

lwy wykorzystują intuicyjne porównywanie liczebności zbiorów podczas polowania, szczury i pszczoły – do zdobywania przysmaków podczas badań naukowych, a także, że szympansy są w stanie opanować dodawanie prostych ułamków.

Nieufnym i zrażonym do matematyki Dambeck pomoże zmienić perspektywę, np. spojrzeć na matematyczne zadanie jak na ciekawą zagadkę do rozwikłania. Przytacza klasyczne przykłady zadań, do których rozwiązania potrzebne jest wyjście poza schemat (znajdowanie fałszywej monety), sposobów na ułatwienie sobie obliczania (np. kwadratów liczb dwucyfrowych czy wielokrotności 11), czy prostych dowodów nieoczywistych dla ucznia faktów (jak istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych czy równoliczność $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}_+$). Zachęca też czytelnika do zmierzenia się z wybranymi przez niego zadaniami, które dodaje na koniec każdego rozdziału (dołącza też ich rozwiązania, a także bogatą bibliografię, gdzie szukać kolejnych).

Książkę czyta się lekko i szybko; wydana jest estetycznie i tak, że nie męczy oczu. Zdarzają się drobne niedoskonałości w korekcie (i tak Ian Stewart staje się Stewardem; nie ma też zróżnicowania między liczeniem i obliczaniem). Książka nie wymaga od czytelnika szczególnego skupienia, nadaje się do czytania w podróży czy podczas stania w kolejce. Adresowana jest do szerokiego grona osób: można ją podsunąć zarówno uczniowi, jak i jego rodzicom czy dziadkom. Należy jednak wyraźnie podkreślić, że *Im więcej dziur, tym mniej sera*, choć rozprawia się kategorycznie z mitem matematyki jako nauki o bezmyślnym liczeniu, nie niesie za sobą głębszych treści czy wiadomości o samej matematyce, a nawet momentami nieco ją spłyca. Poleciłabym ją głównie dwóm grupom: osobom, które matematyki nie lubią (w każdym wieku, nie tylko szkolnym) oraz... nauczycielom: jej lektura może być bardzo dobrym bodźcem do zastanowienia się nad tym, jak przestawia się matematykę uczniom i czy w trakcie nauczania nie zagubił się obraz matematyki jako nauki ciekawej i szlachetnej. Wreszcie, to świetna lektura dla studentów matematycznej specjalizacji nauczycielskiej. To rzeczy ważne; jak pisze Dambeck, sporo matematycznych fobii powstaje podczas edukacji. Tezę tę autor opiera na badaniach naukowych; niektóre z ciekawych doświadczeń omawia. Czytamy np., że we Francji podano dzieciom do rozwiązania zadanie o absurdalnej treści: „Na statku znajduje się 27 owiec i 10 kóz. Jak sądzisz, ile lat ma kapitan?”. O ile jedynie 10% przedszkolaków próbowało na nie udzielić odpowiedzi, o tyle wśród czwartoklasistów już 71%! Uczniowie starsi, przyzwyczajeni do tego, że w zadaniach pyta się ich nie tyle o sens, a o liczbę, dodawali usłyszane wartości. Ba, uczniowie liczą nawet, wiedząc że coś się nie zgadza („Masz 10 ołówków i 20 kredek. Ile masz lat?” – „Mam 30 lat” – „Ale przecież doskonale wiesz, że nie masz 30 lat!” – „No pewnie. Ale to nie moja wina. To pan podał mi złe liczby.”).

Dambeck opowiada czasem o rzeczach bardzo prostych długo, a o trudnych i ciekawszych jedynie hasłowo (i tak, czytając o dowodach eleganckich i pięknych, dowiadujemy się tylko, że istnieje wyjątkowej urody dowód twierdzenia o zaczesaniu jeża i istnieją „Dowody z Księgi” – więcej miejsca autor poświęca na przykład sztuczkom dotyczącym liczenia). Dlatego raczej nie dałabym jej uczniowi bardzo zdolnemu. Dla ucznia zainteresowanego matematyką książka ta może być jedynie ciekawostką, a nie punktem wyjścia do matematyki wyższej. Nie jest to jednak zarzut; takie lektury też są potrzebne.

Joanna Zwierzyńska

[O matematyku, co nie umiał rysować]

Na łamach [Macierzatora] co jakiś okres (który jest zmienną losową o wartości oczekiwanej „miesiąc” i nieskończonej wariancji) staramy się przypomnieć tym, którzy pośród labiryntów wzorów zatracili nieco obraz matematyki jako nauki ciekawej i interesującej, że matematyka jest nauką ciekawą i interesującą. Czasem robimy to poprzez anegdotki, czasem przez żarty, najczęściej przez artykuły przybliżające matematykę nawet bardzo abstrakcyjną w sposób przystępny i ciekawy (a czasem nawet zabawny). Mogłoby się jednak wydawać, że na tym polu Popularyzacji Matematyki stoimy sami, otoczeni zewsząd krwiożerczymi Osobami Dla Których Matma Jest Nudna. Czy tak jest w istocie? Czy Katowice stanowią ostatni bastion popularyzacji matematyki? Czy... No niestety całe napięcie już dawno uleciało, bo wszyscy czytaliście stronę wcześniej artykuł Ani o książkach popularnomatematycznych, więc przestanę przedłużać i po prostu napiszę – nie, tak nie jest. Księgarnie i Internet pełne są materiałów pokazujących matematyczne żarty, anegdoty, historie, a nawet komiksy.

Prawdopodobnie najsłynniejszym z tych ostatnich jest XKCD, komiks tworzony przez Randalla Munroe, byłego pracownika NASA. Komiks ma dwie cechy charakterystyczne – a) 90% „pasków” obfituje w mniej lub bardziej specjalistyczne żarty matematyczne i ogólnonaukowe; b) komiks jest rysowany w bardzo uproszczony sposób, za pomocą znanych i lubianych „ludzików z kresek” (któż nie rysował ich za młodu!). Z komiksu możemy dowiedzieć się, co się dzieje gdy matematyk wycina dynię na Halloween, jak wygląda uniwersalny spis składników każdego produktu we wszechświecie, jakie seksualne fetysze ma Goedel i co prawdziwy matematyk powinien zrobić, gdy podczas apokalipsy martwi powstaną z grobów. Od jakiegoś czasu Randall publikuje również co tydzień artykuły „What if...?”, odpowiadające na różne popularne hipotetyczne pytania przy pomocy zaawansowanych metod fizyki i matematyki. Jeżeli więc wciąż dręczy Cię pytanie, co się stanie, gdy wszyscy na Ziemi jednocześnie podskoczą, na ile zabarwiłby się księżyc, gdyby wszyscy ludzie jednocześnie skierowali nań swoje kieszonkowe lasery oraz jak wyglądałby nasz świat, gdyby rzeczywiście dla każdej osoby istniała jedyna „druga połówka", nie czekaj, zarezerwuj kilka godzin swego czasu wolnego, wpisz xkcd.com w przeglądarce i ciesz się z każdego żartu, który złapiesz;)

Niewinny Rosomak

[O granicach w przyrodzie]

Jeszcze nie tak dawno, bo w tegorocznym kwietniowym wydaniu [Macierzatora] można było przeczytać artykuł Niewinnego Rosomaka zawierający między innymi myśl mówiącą że „powinny być książki „X dla matematyków", gdzie X oznacza jakąś trudną dziedzinę nauki – chemię kwantową, teorię względności, epistemologię". Mając do czynienia na co dzień zarówno z matematyką, jak i fizyką poczułem się wywołany do tablicy. Uwzględniając jednocześnie stosunkowo niewielką objętość [Macierzatora] postanowiłem napisać nie książkę, a artykuł na temat zasady nieoznaczoności częściowo relizujący tę myśl.

Najogólniej sformułowana zasada nieoznaczoności mówi, że wśród wielkości fizycznych opisujących zachowanie układu atomowego można znaleźć takie pary, że niemożliwe jest jednoznaczne przeprowadzenie ścisłego pomiaru obu wielkości. Często podawane sformułowanie mówiące o niemożności jednoczesnego pomiaru współrzędnej położenia x i odpowiadającej jej współrzędnej pędu p_x jest obecnie tylko szczególnym przypadkiem zasady nieoznaczoności. Przykłady innych takich par to energia E i czas t, w którym jest mierzona. Ponadto zasada precyzuje, kiedy niemożliwy jest jednoczesny dokładny pomiar dwóch obserwabli – w mechanice kwantowej wartości fizycznych reprezentowanych przez operatory hermitowskie w przestrzeni L^2 stanów kwantowo-mechanicznych. Dzieje się tak wtedy, kiedy obserwable nie komutują. Warto zaznaczyć, że źródło tego błędu nie leży w nieudolności eksperymentatora czy braku precyzji przyrządu, a zasada nieoznaczoności jest po prostu bardzo podstawowym prawem przyrody. W odróżnieniu od m.in. zasady zachowania energii (którą „dowodzi się" eksperymentalnie), zasadę nieoznaczoności można w stosunkowo nieskomplikowany sposób dowieść.

Jednak zanim będzie to możliwe, konieczne będzie wprowadzenie lub przypomnienie kilku definicji. Jeśli A, B będą operatorami, to wyrażenie

$$[A, B] = AB - BA$$

nazywać będziemy komutatorem operatorów A i B. Mówimy że operatory A i B komutują, jeśli

$$[A, B] = 0$$

choć zazwyczaj tak nie będzie – składanie operatorów jest na ogół nieprzemienne. Niech $(\varphi|\Psi)$ będzie iloczynem skalarnym elementów φ, Ψ. Operator C nazywać będziemy hermitowskim, jeśli zachowany będzie warunek

$$(C\varphi|\Psi) = (\varphi|C\Psi)$$

dla każdych φ, Ψ będących elementami przestrzeni Hilberta wszystkich stanów kwantowo-mechanicznych. Wartością oczekiwaną operatora C nazywać będziemy wyrażenie

$$(\varphi|C\varphi),$$

przy czym φ jest tzw. funkcją falową – to funkcja spełniająca pewne postulaty, której znajomość w pełni opisuje stan układu atomowego. Ma ona również charakter probabilistyczny – jej kwadrat jest proporcjonalny do gęstości prawdopodobieństwa znalezienia się układu w stanie φ.

Zasadę nieoznaczoności w matematycznej postaci można zapisać następująco: jeśli dla dwóch operatorów hermitowskich A i B spełniona jest relacja komutacji

$$[A, B] = iC$$

gdzie C jest operatorem liniowym, to zachodzi wtedy nierówność

$$\Delta A \Delta B \geqslant \frac{|\langle C \rangle|}{2}$$

gdzie $\langle C\rangle$ jest wartością oczekiwaną operatora C, a

$$\Delta A = \left\langle (A - \langle A\rangle)^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\langle A^2\rangle - 2A\langle A\rangle + \langle A\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

jest odchyleniem standardowym (dyspersją) operatora A. Zdefiniujmy operatory $\bar{A}$ i $\bar{B}$ określone wzorami

$$\bar{A} = A - \langle A\rangle, \quad \bar{B} = B - \langle B\rangle.$$

Zauważmy, że – tak samo jak operatory A i B – są one hermitowskie i spełniają taką samą relację komutacji

$$[\bar{A}, \bar{B}] = iC.$$

Dokonując w znanej nierówności Schwarza

$$\|\varphi\|\|\chi\| \geqslant |(\varphi|\chi)|$$

podstawienia

$$\varphi = \bar{A}\psi, \quad \chi = \bar{B}\psi$$

i podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy nierówność

$$\|\bar{A}\psi\|^2\|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant |(\bar{A}\psi|\bar{B}\psi)|^2.$$

Korzystając z hermitowskości operatora $\bar{A}$, możemy zapisać prawą stronę nierówności w postaci

$$|(\psi|\bar{A}\bar{B}\psi)|^2 = |\langle\bar{A}\bar{B}\rangle|^2 = \langle\bar{A}\bar{B}\rangle^*\langle\bar{A}\bar{B}\rangle.$$

Zauważmy teraz, że wyrażenie $\langle\bar{A}\bar{B}\rangle^*$ można przekształcić w następujący sposób:

$$\langle\bar{A}\bar{B}\rangle^* = (\psi|\bar{A}\bar{B}\psi)^* = (\bar{A}\psi|\bar{B}\psi)^* = (\bar{B}\bar{A}\psi|\psi)^* = (\psi|\bar{B}\bar{A}\psi) = \langle\bar{B}\bar{A}\rangle;$$

korzystamy tu z własności iloczynu skalarnego i hermitowskości $\bar{A}$ i $\bar{B}$. Zapisując jeszcze $\langle\bar{A}\bar{B}\rangle$ w postaci

$$\frac{1}{2}(\langle\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A}\rangle + \langle\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A}\rangle)$$

możemy dalej przekształcać prawą stronę nierówności

$$\begin{aligned}
&|\langle\bar{A}\bar{B}\rangle|^2 = \\
&= \frac{1}{2}(\langle\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A}\rangle + \langle\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A}\rangle)^*\frac{1}{2}(\langle\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A}\rangle + \langle\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A}\rangle) = \\
&= \frac{1}{4}(|\langle\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A}\rangle|^2 + |\langle\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A}\rangle|^2).
\end{aligned}$$

Wróćmy do nierówności Schwarza, kolejne przekształcenia

$$\begin{aligned}
\|\bar{A}\psi\|^2\|\bar{B}\psi\|^2 &\geqslant |(\bar{A}\psi|\bar{B}\psi)|^2 = |\langle\bar{A}\bar{B}\rangle|^2 = \\
&= \frac{1}{4}(|\langle\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A}\rangle|^2 + |\langle\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A}\rangle|^2) \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{4}(|\langle\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A}\rangle|^2) = \frac{1}{4}|\langle[\bar{A},\bar{B}]\rangle|^2 = \\
&= \frac{1}{4}|\langle iC\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle C\rangle|^2
\end{aligned}$$

skutkują otrzymaniem poniższej nierówności:

$$\|\bar{A}\psi\|^2\|\bar{B}\psi\|^2 \geqslant \frac{1}{4}|\langle C\rangle|^2.$$

Z jej lewej strony występują wyrażenia postaci $\|\bar{A}\psi\|^2$, które okazują się być dyspersjami „niekreskowanych" operatorów:

$$\|\bar{A}\psi\|^2 = (\bar{A}\psi|\bar{A}\psi) = (\psi|\bar{A}^2\psi) = \langle\bar{A}^2\rangle = \langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle = (\Delta A)^2.$$

Opuszczając po obu stronach nierówności kwadraty otrzymamy

$$\Delta A \Delta B \geqslant \frac{|\langle C \rangle|}{2},$$

a więc zasadę nieoznaczoności. W 1927 roku Heisenberg sformułował ją jedynie dla położeń i pędów, na uogólnienie jej do obecnej wersji potrzebne były kolejne lata badań. Nie był też w stanie udowodnić jej w przytoczonej tu postaci – choć był wyjątkowo sprawnym fizykiem (w trzy lata od podjęcia studiów uzyskał tytuł doktora fizyki), to w latach odkrycia zasady nieoznaczoności nie miał jeszcze wystarczającej wiedzy matematycznej.

Czy z tego wynika jakaś relacja nieoznaczoności współrzędnych położeń i pędów? Poruszając się w trójwymiarowej przestrzeni będziemy mieli po trzy współrzędne położenia i pędu: x_1, x_2 i x_3 oraz p_{x_1}, p_{x_2} i p_{x_3}. Operator i-tej współrzędnej pędu definiuje się w następujący sposób

$$p_{x_i} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i},$$

przy czym $\hbar$ to tzw. zredukowana stała Plancka - jedna z najczęściej występujących stałych w fizyce kwantowej. Policzmy więc komutator i-tej współrzędnej położenia i j-tej współrzędnej pędu działający na dowolną funkcję falową ψ.

$$[x_i, p_{x_j}]\psi = [x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}]\psi = -i\hbar[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}]\psi = -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial(x_i\psi)}{\partial x_j}\right) =$$
$$= -i\hbar\left(x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - x_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi\right) = -i\hbar\left(-\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\psi\right) = i\hbar\delta_{ij}\psi,$$

więc

$$[x_i, p_{x_j}] = i\hbar\delta_{ij}$$

gdzie δ_{ij} to delta Kroneckera, przyjmująca wartość 1, gdy $i = j$, i wartość 0, gdy $i \neq j$. Widzimy więc, że teoretycznie możliwy jest dokładny pomiar którejś ze współrzędnych położenia i nieodpowiadającej jej współrzędnej pędu. Jednak gdy spróbujemy zmierzyć np. współrzędną położenia x_1 i odpowiadającą jej współrzędną pędu p_{x_1}, to iloczyn błędu pomiaru obu tych wartości będzie nie mniejszy niż $\frac{\hbar}{2}$, co jest treścią zaproponowanej przez Heisenberga, a przy tym znanej powszechniej niż uogólniona wersja zasady nieoznaczonosci. Jeśli tylko zapragniemy to będziemy mogli zmierzyć jedną z tych wartości bardzo dokładnie; okaże się jednak wtedy, że dokładność pomiaru drugiej z nich będzie znikoma.

Minstrel

[Zapraszamy do Koła Naukowego Matematyków UŚ!]

Tych, którzy chcą porozmawiać o matematyce i tych, którzy po prostu szukają grona przyjaznych osób; tych, którzy mają ochotę posłuchać o czymś, o czym nie usłyszą podczas wykładów i tych, którzy chcieliby się zaangażować w zbiórkę mikołajkową lub warsztaty dla uczniów szkół średnich, przebojowych i nieśmiałych, tych, którzy lubią mówić i tych, którzy wolą słuchać – **wszystkich** serdecznie zapraszamy do Koła Naukowego Matematyków UŚ!

Do Koła nie trzeba się w żaden sposób zapisywać, nikt też nie będzie Cię pytał o średnią czy rozwiązania problemów matematycznych – tym, co jest dla nas najważniejsze, jest to, żeby każdy czuł się u nas dobrze. Jesteśmy grupą osób lubiących wzajemnie siebie i matematykę. Organizujemy konferencje i spotkania referatowe, popularyzujemy matematykę, przeprowadzamy zbiórkę mikołajkową, wydajemy [Macierzator] i robimy wiele innych rzeczy, ale po pierwsze: godzinami przesiadujemy w pokoju Koła, rozmawiając, ale też po prostu: ze sobą będąc.

Każdy jest u nas mile widziany; każdy też znajdzie taką formę aktywności, jaka mu odpowiada. Przyjdź, przekonaj się! Zapraszamy do pokoju 524 w Instytucie Matematyki UŚ (ul. Bankowa 14, Katowice). Nie musisz się nikomu zgłaszać ani zapowiadać – po prostu do nas wpadnij:)

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Szymon Draga, Marcin Jenczmyk,
Mateusz Jurczyński, Beata Łojan, Joanna Zwierzyńska
Autorka komiksu: Anna Jacek
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`.
Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

październik 2012

[Kącik TEXowy część 10]

słów kilka o LATEXowych tabelkach

W pierwszej powakacyjnej części *Kącika TEXowego* zajmiemy się tabelkami. Pokażemy jak je tworzyć, jakie parametry wpływają na wygląd tabeli oraz w jaki sposób można je zmienić. Wspomnimy również o środowisku przemieszczalnym `table`, spisie tabel i pakiecie `array`.

Beata Łojan (`b.lojan@knm.katowice.pl`)

[Otoczenie `tabular`]

Podstawowym środowiskiem służącym do składania tabel jest otoczenie `tabular` o składni przedstawionej poniżej (`tabular_skladnia.tex`). Środowisko to posiada jeden argument obowiązkowy `opis_kolumn`, który określa ilość kolumn tabeli oraz w jaki sposób ma zostać wyrównana ich zawartość (patrz tabela 10.1). Otoczenie `tabular` posiada również parametr opcjonalny `[pozycja]`, który określa pionowe położenie tabeli wewnątrz środowiska. Możliwe wartości to `t` – wyrównanie do góry, `c` – wycentrowanie (wartość domyślna), `b` – wyrównanie do dołu.

tabular_skladnia.tex

```
\begin{tabular}[pozycja]{opis_kolumn}
komórka 11 & komórka 12 & komórka 13 & ..... & komórka 1n\\
.................................................
komórka m1 & komórka m2 & komórka m3 & ..... & komórka mn\\
\end{tabular}
```

W miejsce `komórka xx` należy wpisać zawartość poszczególnych komórek. W danym wierszu, komórki oddzielamy od siebie za pomocą znaku `&`, a koniec wiersza zaznaczamy `\\`. Dodatkowo odstęp między dwoma wierszami tabeli możemy zmienić za pomocą `\\[odległość]`. Aby wstawić poziome linie korzystamy z polecenia `\hline`.

Parametr	**Znaczenie**
`c`	zawartość kolumny jest wycentrowana
`l`	zawartość kolumny jest wyrównana do lewej
`r`	zawartość kolumny jest wyrównana do prawej
`|`	pojedyńcza linia pionowa oddzielająca kolumny
`||`	podwójna pionowa linia oddzielająca kolumny
`p{szer}`	ustala szerokość kolumny na wartość `szer`, a jej zawartość zostaje wyrównana pionowo w górę
`m{szer}`	ustala szerokość kolumny na wartość `szer`, a jej zawartość zostaje wyrównana w pionowo do środka (pakiet `array`)
`b{szer}`	ustala szerokość kolumny na wartość `szer`, a jej zawartość zostaje wyrównana pionowo w dół (pakiet `array`)
`@{tekst}`	do kolumny tabeli wprowadzany jest `tekst`

Tabela 10.1: Parametry opisujące wygląd kolumn

Istnieje również gwiazdkowa wersja środowiska `tabular*`, w którym dodatkowym parametrem obowiązkowym jest `{szerokosc}`. Parametr ten określa szerokość środowiska, pozostałe parametry pozostają bez zmian:

tabular*_skladnia.tex

```
\begin{tabular*}{szerokosc}[pozycja]{opis_kolumn}
komórka 11 & komórka 12 & komórka 13 & ..... & komórka 1n\\
..........................................................
komórka m1 & komórka m2 & komórka m3 & ..... & komórka mn\\
\end{tabular*}
```

Poniżej prosty przykład (`przyklad1`) przedstawiający działanie środowiska `tabular`:

przyklad1.tex

```
\begin{center}
\begin{tabular}{|r|c|l|}\hline\hline
jeden & dwa & trzy \\[0.4cm]\hline
cztery & pięć & sześć \\\hline
siedem & osiem & dziewięć \\\hline
\hline\end{tabular}\end{center}
```

przyklad1.pdf

jeden	dwa	trzy
cztery	pięć	sześć
siedem	osiem	dziewięć

Wykorzystując parametr `@{tekst}` możemy wyrównać kolumny względem separatora dziesiętnego:

przyklad2.tex

```
\begin{tabular}{|rr@{,}l|}
\hline\hline
$5$ & $5$ &$000\;000$\\[3pt]
$50$ & $50$ & $000$\\[3pt]
$5\;000$ & $5\;000$ & $00$\\[3pt]
\hline\hline\end{tabular}
```

przyklad2.pdf

5	5,000 000
50	50,000
5 000	5 000,00

Polecenie `multicolumn`. Instrukcja ta umożliwia połączenie ze sobą kolumn tabeli. Składnia tego polecenia jest następująca:

```
\multicolumn{ilosc_kolumn}{pozycja}{zawartosc}
```

Parametr `ilosc_kolumn` określa ile kolumn mamy ze sobą połączyć, `pozycja` określa sposób wyrównania tekstu w połączonych kolumnach i może przyjmować wartości: `r` – wyrównanie do prawej, `c` – wycentrowanie, `l` – wyrównanie do lewej, zaś w miejsce argumentu `zawartosc` wpisujemy treść, która ma się znaleźć w łączonych kolumnach. Przykładowo:

przyklad3.tex

```
\begin{center}
\begin{tabular}{|r|c|l|}\hline\hline
jeden & dwa & trzy \\\hline
cztery & \multicolumn{2}{c||}{11}
\\[0.6cm]\hline
siedem & osiem & dziewięć \\\hline
\hline\end{tabular}\end{center}
```

przyklad3.pdf

<table><tr><td>jeden</td><td>dwa</td><td>trzy</td></tr><tr><td>cztery</td><td colspan="2">11</td></tr><tr><td>siedem</td><td>osiem</td><td>dziewięć</td></tr></table>

Polecenie `vline`**.** Instrukcja ta umożliwia narysowanie pionowej linii na całą wysokość pojedyńczej komórki tabeli. Przykładowo:

przyklad4.tex

```
\begin{center}
\begin{tabular}{|l|}\hline\hline
jeden \vline 2 \vline 3\\\hline
4 \vline pięć \vline 6\\[9pt]\hline
7 \vline 8 \vline dziewięć\\\hline
\hline\end{tabular}\end{center}
```

przyklad4.pdf

jeden	2	3
4	pięć	6
7	8	dziewięć

Polecenie `cline`**.** Instrukcja ta umożliwia narysowanie linii poziomej pomiędzy wskazanym zakresem komórek. Polecenie ma postać: `\cline{i-j}`. Przykładowo:

przyklad5.tex

```
\begin{center}
\begin{tabular}{|ccc|}\hline\hline
jeden & dwa & 3 \\[8pt]\cline{1-2}
4 & pięć & sześć\\[5pt]\cline{2-3}
siedem & osiem & 9 \\\hline\hline
\end{tabular}\end{center}
```

przyklad5.pdf

jeden	dwa	3
4	pięć	sześć
siedem	osiem	9

[Zmienne odpowiadające za wygląd tabeli]

Na wygląd tabeli wpływa kilka parametrów, których wartość możemy w łatwy sposób zmienić, a tym samym zmodyfikować wygląd tabeli. Listę parametrów przedstawia tabela 10.2. Pierwsze trzy parametry zmieniamy za pomocą poznanego już wcześniej polecenia:

```
\setlength{\zmienna}{wartosc}
```

Wartość parametru `\arraystretch` możemy zmienić redefiniując[1] jego pierwotną wartość, tzn.:

```
\renewcommand{\arraystretch}{mnoznik}.
```

Przykładowo:

```
\setlength{\tabcolsep}{10pt}
\setlength{\arrayrulewidth}{2pt}
\setlength{\doublerulesep}{4pt}
\renewcommand{\arraystretch}{1.5}% spowoduje zwiększenie odstępu o 50\%
```

Wartość ostatniego polecenia `\extracolsep` zmieniamy poprzez podanie jego nowej wartości jako argumentu tego polecenia. Ponadto polecenie to ma zastosowanie w połączeniu z `@{\tekst}`. Przykładowo:

```
\begin{tabular}[t]{l|@{\extracolsep{1cm}}l}
```

[1]Więcej o defeniowaniu nowych i redefiniowaniu już istniejących poleceń pojawi się w jednej z następnych części

Zmienna	Opis
`\tabcolsep`	połowa szerokości odstępu między kolumnami tablicy (domyślnie `6pt`)
`\arrayrulewidth`	szerokość pionowej linii separującej kolumny (domyślnie `0.4pt`)
`\doublerulesep`	odległość między dwoma liniami pionowymi stanowiącymi separator kolumn (domyślnie `2pt`)
`\arraystretch`	„mnożnik” odstępu między wierszami tablicy
`\extrarowheight`	dodatkowy odstęp między liniami (domyślnie `0pt`)

Tabela 10.2: Zmienne wpływające na wygląd tabel

[Środowisko przemieszczalne `table`]

W przypadku niektórych obiektów, takich jak tabele, zachodzi często potrzeba dodawania podpisów, numerowania, czy możliwość użycia odsyłaczy. Służy do tego środowisko przemieszczalne `table`, które posiada jedne argument opcjonalny.

Dostępne `parametry` to `h` – wstaw tabelę w tym miejscu, `t` – na górze strony, `b` – na dole strony, `p` – na stronie z elementami przemieszczalnymi oraz znak `!` – zignoruj parametry regulujące umieszczanie obiektów ruchomych. Domyślną kombinajcą parametrów jest `tbp`. Dodatkowo umieszczając tabele w tym środowisku, zostaną one wstawione do spisu tabel, który wywołujemy poleceniem `\listoftables`.

przyklad6.tex

```
\begin{table}[parametry]
\begin{tabular}
Definicja tabeli
\end{tabular}
\caption[Krótki opis]{Opis tabeli}
\end{table}
```

przyklad6.pdf

Definicja tabeli
....
....

Tabela 10.3: Środowisko `table`

[Pakiet `array`]

Wspomniany już wcześniej pakiet `array` dostarcza nam jeszcze kilku instrukcji, ułatwiających pracę z tabelami. Dostarcza nam m.in.: poleceń `>{macro}`, gdzie `macro` zostanie wykonane zawsze przed rozpoczęciem komórki w tak określonej kolumnie oraz `<{macro}`, gdzie instrukcja `macro` zostanie wykonana po zakończeniu komórki. Przykładowo:

przyklad7.tex

```
\begin{tabular}{|>{$}c<{$}>{\sc}r
>{\small}l|}\hline\hline
e^{\pi i}+1=0 & równanie & Eulera\\
\sin & sinus & funkcja\\
\frac{1}{2} & ułamek & liczba \\
\hline\hline\end{tabular}
```

przyklad7.pdf

$e^{\pi i}+1=0$	RÓWNANIE	Eulera
$\sin$	SINUS	funkcja
$\frac{1}{2}$	UŁAMEK	liczba

❄ ❄ ❄